



送信者: [redacted] / 中部電力
日付: 2008/03/13 17:20

宛先 [redacted]
cc [redacted]
件名 【資料送付】基礎方程式に関する参考文献ほかについて

原子力安全・保安院 名倉審査官 殿

中部電力の [redacted] です。お世話になります。

昨日のヒアリングでご依頼のありました水位変動の基礎方程式に関する参考文献を送りますので、ご査収願います。
また、管水路の式の導出の資料を作成しましたので合わせて送ります。

以上よろしく申し上げます。

[redacted]
中部電力株式会社 発電本部 土木建築部
原子力土建グループ
〒461-8680 名古屋市東区東新町1番地
PHS [redacted]
TEL [redacted]
FAX [redacted]
E-mail : [redacted]

(See attached file: 基礎方程式に関する文献.pdf) (See attached file: 基礎方

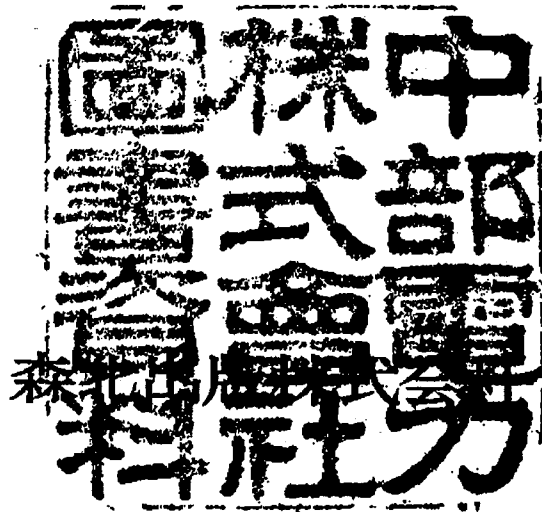


式の導出.pdf) 基礎方程式に関する文献.pdf 基礎方程式の導出.pdf

水理学

工学博士

佐藤清一 著



著者略歴

- 1938年 北大王学部土木科卒業，内務省土木試験所に勤務
- 1941年 河川研究室長
- 1943～47年 東大講師（水理学）
- 1944～49年 運輸省港湾局兼務
- 1949年 経済安定本部資源委員会専門委員
- 1950年 国際連合 ECAFE 治水会議，第4回世界大堰堤会議，国際水理研究会議（インドにて開催）に出席
- 1953年 工学博士学位授与
- 1958年 建設省土木研究所河川部長，河川研究によって建設大臣賞を受賞
- 1959年 退官，日本コンサルタントKK，常務取締役



水 理 学

昭和35年9月1日 第1刷 発行
 昭和35年11月20日 第2刷 発行
 定 価 900 円



著 者 佐 藤 清 一
 発 行 者 森 北 常 雄
 印 刷 者 堀 鉄 判

発 行 所

森北出版株式会社

東京都千代田区神田小川町3～10
 振替東京 34757
 電話 (291) 3068・2616・4510

日本書籍出版協会・自然科学書会・工学書協会会員

印刷 株式会社文弘社

製本 長山製本

実験によれば直管内の圧力は静水圧的分布をなす*。従つて直管部上下面における圧力 p_2 , p_1 は(10・132), (10・133)式により

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_{a2}}{w} \\ \frac{p_{a1}}{w} \end{array} \right\} = H - \frac{V_0^2}{2g} \left(1 + \zeta_0 + \lambda \frac{x}{D} \right) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{D}{2} \\ +\frac{D}{2} \end{array} \right. \quad (10\cdot148)$$

としてよい。

曲管部における上下面の圧力 p_2 , p_1 は(10・134)と(10・146)式から次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_{s2}}{w} \\ \frac{p_{s1}}{w} \end{array} \right\} = H + Z_0 - Z_s - \left(\zeta_0 + \lambda \frac{L_0}{D_0} \right) \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_s^2}{2g}$$

$$\left(1 + \frac{\lambda A_s^2}{4} \int_0^s \frac{P_s}{A_s^3} ds \right) \left\{ \begin{array}{l} +b_s \left\{ -\cos \theta + \varphi \frac{Q^2}{g A_s^2 R_0} \right\} \\ +b_s \left\{ +\cos \theta - \varphi \frac{Q^2}{g A_s^2 R_0} \right\} \end{array} \right\} \quad (10\cdot149)$$

これらによれば直管部では上面が、曲管部では下面が低圧となる。設計ではこの低圧が真空(大気圧を基準として水頭で表わせば -10.3m)にならないようにするのはもちろん、許容低圧(たとえば大気圧基準として -3.0m)以下にならないようにすべきである。

10・17 不定流の Bernoulli の定理と連続の式

流体はまず摩擦のないものとし外的質力は重力だけとする。流れの中に時刻 t における流管を考え、その任意の位置における断面を δa とする。これを中心として長さ δs の流体の微小体 ($\delta a \delta s$) を考えれば、図-10・31 に示す

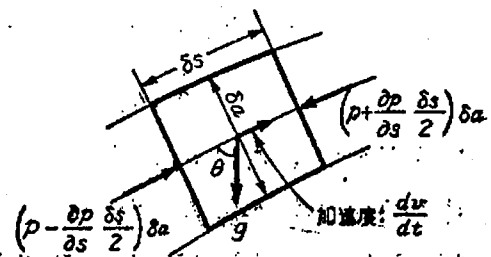


図-10・31

* 村幸雄、荒木正夫、堰提放水管に関する研究(1)、建設省土木研究所報告、88号(昭和29年9月)、p. 156

ように作用する力は

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}\right) \delta a - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}\right) \delta a$$

なる圧力と

$$g \rho \delta a \delta s \quad (\rho = \text{流体密度})$$

なる質力と

$$\frac{dv}{dt} \rho \delta a \delta s$$

なる加速度による慣性力とである。

従って流管の方向（すなわち s の方向）について d'Alembert の原理を適用すれば、この微小体の運動の方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \theta + \rho \frac{dv}{dt} = 0$$

となる。ところが流速 v は場所 s と時間 t によって変化し、 s は t の関数であるから

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

また微小体 ($\delta a \delta s$) の中心の、ある基面からの高さを z とすれば

$$\cos \theta = \frac{\partial z}{\partial s}$$

であるから上式は

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (10 \cdot 150)$$

となる。これを不定流の Bernoulli の定理といい、不定流の運動の方程式である。

この場合の連続の方程式はつぎのようにして求められる。

この流体微小体は流管の一断片であるから管の側壁からの流体の出入はなく、流管の両断面からの流入流出だけである。その差は単位時間に

$$\left\{ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right\} \delta a - \left\{ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right\} \delta a$$

で、これだけの質量が微小体の中に過剰に入ったことになる。

一方単位時間におけるこの微小体の質量の増加は

$$\frac{\partial(\rho \delta a \delta s)}{\partial t}$$

であるから、質量が不変であるためにはこれら両者が等しくなければならない。

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} = 0 \quad (10.151)$$

これが不定流の連続の方程式である。ただし(10.150), (10.151)式の $\partial/\partial s$ は流線に沿っての微分である。

(10.150)式は実は6.3(9)式を流線の δs なる区間に適用したものであって、(9)式を s で偏微分したものにすぎない。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

しかし

$$\Omega = gz \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = v$$

であるから

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (10.152)$$

そして密度が不変である場合には

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

となり(10.150)式に全く一致する。

つぎに流れに勢力の損失がある場合には損失水頭に相当する抵抗力 wh_i を考慮すればよい。

流管の δs なる長さについての抵抗力は $\rho g \delta h_i \delta a$ であるからこれを(10.150)式に加えれば摩擦損失のある不定流のBernoulliの定理は

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial h_i}{\partial s} = 0 \quad (10.153)$$

となる。

10.18 管の不定流の運動方程式と連続の方程式

流体は非圧縮性とし、摩擦損失があるものとする。

摩擦による損失水頭 h_f は δs なる微小長さについて(10・1)式により

$$\delta h_f = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g} \delta s,$$

$$\therefore \frac{\partial h_f}{\partial s} = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{v^2}{2g}.$$

従って管の不定流の運動の方程式は(10・153)式により

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g} = 0. \quad (10\cdot154)$$

となる。ただし d は管の直径である。

つぎに管の流 v の連続の方程式を求めよう。管の断面積を a とし、これを中心として、 $\delta s/2$ だけ前後に離れた断面を 1, 2 とする。

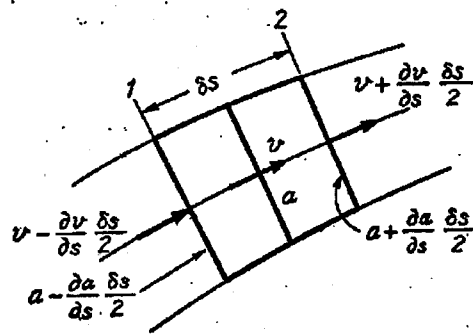


図-10・32

断面 1 における流速および断面積は

$$\left(v - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right), \left(a - \frac{\partial a}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right)$$

であり、断面 2 におけるそれらは

$$\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right), \left(a + \frac{\partial a}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right)$$

である、従って断面 1 より入った量が断面 2 から出た量に等しいためには

$$\left(v - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right) \left(a - \frac{\partial a}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right) = \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right) \left(a + \frac{\partial a}{\partial s} \frac{\delta s}{2} \right)$$

これを δs で割り、 δs を零にした極限を考えれば

$$a \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial a}{\partial s} = 0 \quad (10\cdot155)$$

これが管の連続方程式である。

管の断面が一様である場合は(10・155)式により

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

$$\therefore v = v(t),$$

すなわち流速 v は管の至るところで同一で、全体として時間的に変る。従ってこの場合の式は Q を流量として

$$av=Q \quad (10.156)$$

で表わされる*. この場合の運動の方程式は v が t だけの関数であるから

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0 \quad \text{となり (10.154) 式は}$$

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + \lambda \frac{v^2}{d} = 0 \quad (10.157)$$

となる. さらにこれを管の長さ l について積分すれば

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0 \quad (10.158)$$

となる.

10.19 水ソウの水位が一定である場合の管の流出

図-10.33 に示すような管において, 管の末端のバルブを急に開いた場合の流出の変化を調べてみよう.

管の直径および水ソウの水位は一定とする. 出口 2 を高サの基準にとり大気圧を圧力の基準とすれば (10.158) 式において

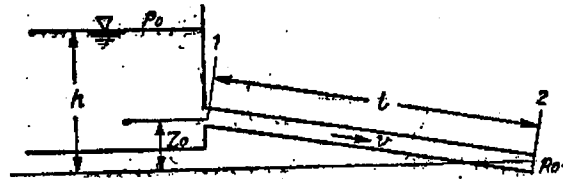


図-10.33

$z_2 - z_1 = -z_0$, $p_2 = 0$ であるから

$$\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{p_1}{w} + z_0 - \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

つぎに貯水池と管の入口 1 について Bernoulli の定理を適用するに, 貯水池の流速水頭と加速度を無視すれば

$$h = \frac{p_1}{w} + z_0 + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}$$

ただし ζ は流入の損失係数である.

上の 2 式から p_1 を消去すれば

$$\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = h - \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}$$

* (10.155) 式も $av=Q$ と同等であるが, この場合の a , v は (10.156) 式の場合と異なり s および t の関数である.

第11章 開水路

11・1 不等流の運動方程式と連続の式

一般に自由水面のない水路を閉水路または管水路というのに対し、自由水面のある水路を開水路という。

開水路の運動方程式を導くに当っては通常流体の圧縮性は無視されるが、流体の摩擦抵抗による損失は考慮に入れられる。前者は特殊の場合にだけ考慮に入れられ、後者は他の特殊の場合にだけ無視される。

開水路の中の流速分布のような、流れの内部に注目する問題は別であるが、開水路の流れを全体として把握するような問題（たとえば水面コウ配の変化とか水深の変化とか）は管水路の場合と同じく、開水路をそのまま一つの流管と考慮して取扱っても十分な精度が得られる。ただしこの場合、水路断面内の流速として平均流速をとり、しかも断面上のいたるところで流速は平均流速に等しいものとする。すなわち流管として考

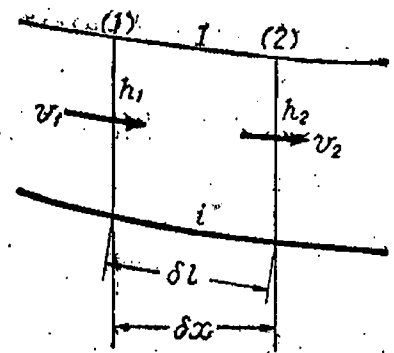


図-11.1

えられた開水路は、平均流速の変化によって表現されるのである。しかし開水路の流管に対して考えられる損失水頭は、流れの内部的な考察から出発はするが、結局は流管全体の立場からこれをつかむのである。

さて、図-11.1において開水路の不等流を、相接近した2断面(1)、(2)で区切り、この2断面間の流れに沿った距離を δl 、水平距離を δx とする。また断面(1)、(2)の平均流速を v_1 、 v_2 とし、水深を h_1 、 h_2 とする。そこで損失を考慮した Bernoulli の定理 9・1 (9.1) 式を、これら2断面の平均流速の流線上において適用すれば

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{w} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{w} + z_2 + h_f$$

ただし z_1 、 z_2 はこの流線のある基準面からのそれぞれの高さ、 p_1 、 p_2 は z_1 、

z_2 における水圧である。

いまこの水路には著しい縦断的曲りがなく、従って水分子には遠心力がほとんど働かないものとすれば、鉛直方向の圧力分布は直線すなわち静圧力の分布の仕方に同じであるとみなすことができる。

断面 (1), (2) における水路底の、基準面からの高さを z_{11} , z_{12} とすれば

$$p_1 = w(h_1 + z_{11} - z_1)$$

$$p_2 = w(h_2 + z_{12} - z_2)$$

$$\therefore \frac{p_2}{w} - \frac{p_1}{w} + z_2 - z_1$$

$$= (h_2 - h_1) + (z_{12} - z_{11}) = \delta h + \delta z_1$$

さらにまた 2 断面の流速水頭の差は

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \delta \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

として表わされるから、結局上式は微小区間 δl について

$$-\delta h - \delta z_1 = \delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \delta h_i$$

と表わされる。これを δl で割れば

$$-\frac{\delta h}{\delta l} - \frac{\delta z_1}{\delta l} = \frac{\delta}{\delta l} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{\delta h_i}{\delta l}$$

あるいは $\delta/\delta l$ を d/dl とおいて

$$-\frac{dh}{dl} - \frac{dz_1}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh_i}{dl} \quad (11.1)$$

となる。ここに

$$\frac{dh}{dl} = \text{水深変化}$$

$$\frac{dz_1}{dl} = \text{水路底の高サの変化}$$

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \text{流速水頭の変化}$$

$$\frac{dh_i}{dl} = \text{損失水頭の変化}$$

である。そこで δl なる微小区間の水平に対する角度を α とすれば

$$dx = \cos \alpha \cdot dl$$

であるから、これによって(11.1)式を書きなおせば

$$-\frac{dh}{dx} - \frac{dz_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh_2}{dx} \quad (11.2)$$

しかし

$$\frac{dz_1}{dx} = \tan \alpha = -i$$

i を河床コウ配と呼ぶ。図-11.2のように水路の微小区間 dl を考え、水面上の点 A から河床 CD に平行線を引き、DB との交りを F とする。また A から水平線を引き、DB との交りを E とする。このときは

$$\angle EAF = \alpha$$

また $\angle EAB$ は自由水表面が水平に対してなす角であって、これを β とする。 $\tan \beta$ の絶対値を水面コウ配と呼び I で表わす。また $\angle FAB$ を γ とすれば

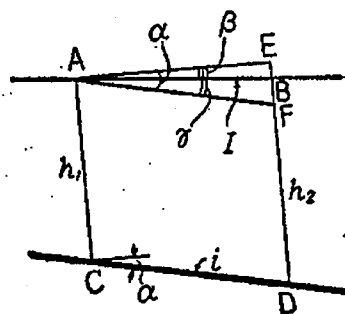


図-11.2

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \gamma) = \frac{\tan \alpha - \tan \gamma}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$$

しかし開水路でわれわれが通常取扱うものは α , β ともに小さいものが多く、従って γ も小さいから上式の \tan の自乗の項を 1 に対して無視すれば

$$-I = \text{水面コウ配} = \tan \beta \approx \tan \alpha - \tan \gamma$$

とすることができる。しかし

$$\tan \alpha = -i$$

$$\tan \gamma \approx -\frac{FB}{AF} = -\frac{\delta h}{dl}$$

であるから

$$I = i - \frac{dh}{dl} \quad (11.3)$$

となる。さらに角度が小さいから $dl \approx dx$ とすれば

$$I = i - \frac{dh}{dx} \quad (11.4)$$

ゆえに(11.2)式と(11.4)式から

$$I = i - \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh_1}{dx} \quad (11.5)$$

が得られる。これがコウ配が小さい開水路の不等流の運動方程式である。

つぎに開水路の断面積を a_1 , a_2 , 流量を Q とすれば流量はどの断面でも一定であるから

$$a_1 v_1 = a_2 v_2 = Q \quad (11.6)$$

あるいはこれを l で微分して

$$v \frac{da}{dl} + a \frac{dv}{dl} = 0 \quad (11.7)$$

また dl を dx になおして

$$v \frac{da}{dx} + a \frac{dv}{dx} = 0 \quad (11.8)$$

(11.6) 式, (11.7) 式, (11.8) 式がこの場合の連続の式である。

11.2 不定流の運動方程式と連続の式

定流の場合には上述のように微小区間に対して

$$-\delta h - \delta z_1 = \delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \delta h_1$$

が成立した。しかし不定流の場合には流況が各断面ごとに変るだけでなく、時間的にも変るのであるから、水理学的量はすべて l と t または x と t との関数になる。従って dh は δh に、 dl は δl 等に変えられねばならない。

さらにこの場合の流速水頭の変化、いいかえれば δt なる微小区間を進行したときの単位重量の流質の運動のエネルギーの変化 $\delta(v^2/2g)$ は

$$\delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta t$$

でなければならない。右辺第2項を書きなおせば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \frac{\delta t}{\delta l} \delta l = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta l = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \delta t$$

であるから

$$\delta \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta l + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \delta t$$

従って

$$-\delta h - \delta z_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \delta l + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \delta l + \delta h_1$$

これを δl で割り δ を ∂ と書けば

$$-\frac{\partial h}{\partial l} - \frac{\partial z_1}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial l} \quad (11.9)$$

さらに $\partial l = \frac{1}{\cos \alpha} \partial x$ であるから

$$-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (11.10)$$

さらに α が比較的小さく $\cos \alpha \approx 1$ とみなされる場合には

$$-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (11.11)$$

さらに (11.4) 式によれば

$$I = i - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (11.12)$$

となる。これが開水路の不定流の運動方程式である。

つぎに開水路の長さ l における断面積を a 、流速を v とし、この断面を中心としてその上下流各 $\delta l/2$ のところに2断面を考えれば、それらにおける流速はそれぞれ近似的に

$$v - \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\delta l}{2}, \quad v + \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\delta l}{2}$$

また断面積は

$$a - \frac{\partial a}{\partial l} \frac{\delta l}{2}, \quad a + \frac{\partial a}{\partial l} \frac{\delta l}{2}$$

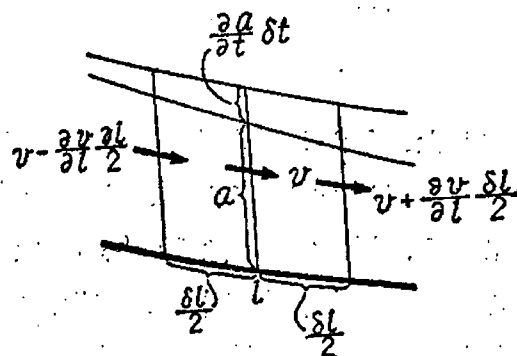


図-11.3

である。従って単位時間に上流断面から入った質量と下流断面から出た質量との差は

$$\begin{aligned} & \rho \left(a - \frac{\partial a}{\partial l} \frac{\delta l}{2} \right) \left(v - \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\delta l}{2} \right) - \rho \left(a + \frac{\partial a}{\partial l} \frac{\delta l}{2} \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\delta l}{2} \right) \\ & = -\rho v \frac{\partial a}{\partial l} \delta l - \rho a \frac{\partial v}{\partial l} \delta l \end{aligned}$$

である。一方断面 a は単位時間に $\partial a / \partial t$ だけ変化して

$$a + \frac{\partial a}{\partial t}$$

となるから、単位時間に δl なる微小区間に貯えられた質量は

$$\rho \left(a + \frac{\partial a}{\partial t} \right) \delta l - \rho a \delta l = \rho \frac{\partial a}{\partial t} \delta l$$

である。質量は不変であるからこの両者を等しいとおけば

$$\rho \frac{\partial a}{\partial t} \delta l = -\rho v \frac{\partial a}{\partial t} \delta l - \rho a \frac{\partial v}{\partial t} \delta l$$

さらに $\rho \delta l$ で割れば

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \left(v \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (11.13)$$

また $av = Q$ であるから

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (11.14)$$

さらに α は小さく $\cos \alpha \approx 1$ とみなせば

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (11.15)$$

これが開水路の不定流の連続の式である。

11・3 等流の運動方程式と連続の式

開水路の流レが等流すなわち等速定流の場合には、各断面の流況は時間的にも同一であるから

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

従って(11.9)式は

$$-\frac{dz_i}{dl} = \frac{dh_i}{dl}$$

となる。あるいは $dx = \cos \alpha dl$ であるから

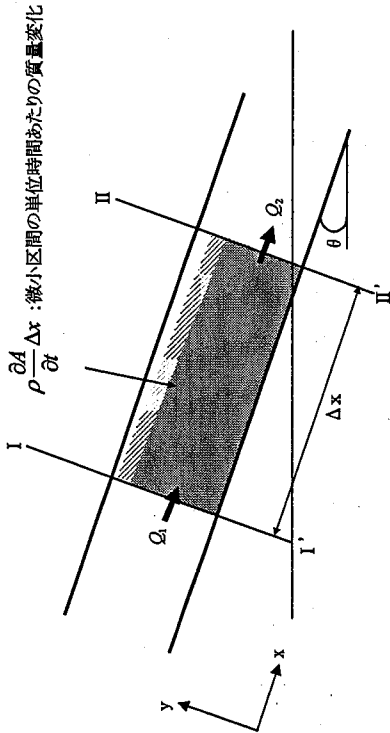
$$i = \frac{dh_i}{dx}$$

さらに、(11.3)式または(11.4)式によれば

$$I = i$$

水位変動の数値シミュレーションの基礎方程式のうち管水路の連続式および運動方程式の導出について

1. 連続式



連続式に関する説明図

上図に示すような断面 I-I' と断面 II-II' に囲まれた微小区間 Δx における単位時間あたりの流体の質量変化は以下の(1)のように表される。

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \dots\dots\dots(1)$$

ここに、ρ は密度、A は流水面積

また、断面 I-I' の流量を Q₁、断面 II-II' の流量を Q₂ とすると、各断面を通して微小区間に単位時間あたりに流入する質量はそれぞれ以下の(2)、(3)のように表される。

断面 I-I' を通過して微小区間に単位時間あたりに流入する質量

$$\rho Q_1 \dots\dots\dots(2)$$

断面 II-II' を通過して微小区間から単位時間あたりに流出する質量

$$\rho Q_2 (= \rho Q_1 + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x) \dots\dots\dots(3)$$

したがって、微小区間における単位時間あたりの流体の質量変化は(2)、(3)より以下の(4)のように表される。

$$\rho Q_1 - \rho Q_2 = -\rho \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \dots\dots\dots(4)$$

質量保存則によれば、微小区間における単位時間あたりの流体の質量変化である(1)と(4)は等しいことから、以下の(5)のように表される。

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x = -\rho \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x$$

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x = 0 \dots\dots\dots(5)$$

(5)の両辺を密度 ρ および Δx で除すると以下の(6)のように表される。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

管路流れの場合は、流水面積 A が時間的に変化しないことから以下の(7)のように表される。

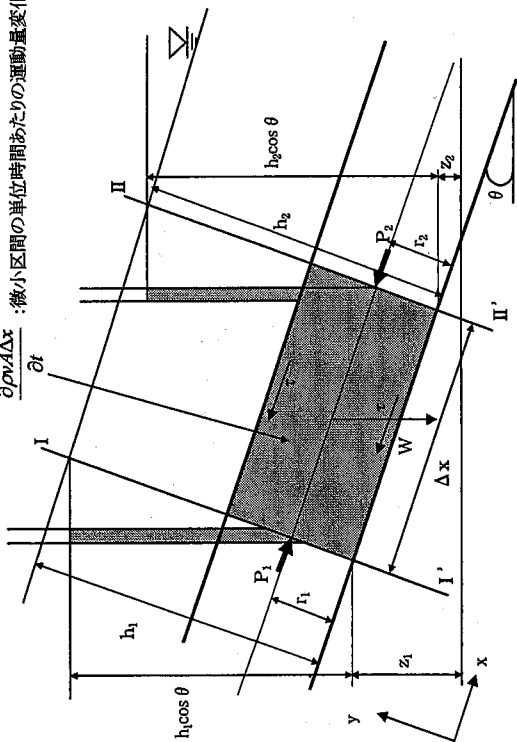
$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

(6)、(7)より、管路路の連続式は以下の(8)のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

2. 運動方程式

$\frac{\partial \rho v A \Delta x}{\partial t}$: 微小区間の単位時間あたりの運動量変化



管路流れの運動方程式に関する説明図

上図に示すような断面 I-I' と断面 II-II' に囲まれた微小区間 Δx における単位時間あたりの流体の運動量変化は以下の(9)のように表される。

$$\rho \frac{\partial v A \Delta x}{\partial t} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 ρ は密度、 v は流速、 A は流水面積

また、断 I-I' の流量を Q_1 、流速を v_1 、断面 II-II' の流量を Q_2 、流速を v_2 とすると、各断面における運動量はそれぞれ以下の(10)、(11)のように表される。

断面 I-I' における運動量

$$\rho Q_1 v_1 \dots \dots \dots (10)$$

断面 II-II' における運動量

$$\rho Q_2 v_2 (= \rho Q_1 v_1 + \rho \frac{\partial Q v}{\partial t} \Delta x) \dots \dots \dots (11)$$

したがって、断面 I-I' と断面 II-II' の断面間の運動量変化は(10)、(11)より以下の(12)のように表される。

$$\rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1 = \left(\rho Q_1 v_1 + \rho \frac{\partial Q v}{\partial t} \Delta x \right) - \rho Q_1 v_1 \dots \dots \dots (12)$$

管路流れの場合は、流水面積 A が時間的に変化しないことから管路の断面積を一様とすると、流速 v および流量 Q は x 方向での変化はないため、断面 I-I' と断面 II-II' の断面間の運動量の変化は以下の(13)のようにゼロとなる。

$$\begin{aligned} \rho Q_2 v_2 - \rho Q_1 v_1 &= \left(\rho Q_1 v_1 + \rho \frac{\partial Q v}{\partial t} \Delta x \right) - \rho Q_1 v_1 \\ &= \rho \frac{\partial Q v}{\partial t} \Delta x = 0 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

断面 I-I' と断面 II-II' の断面間の流体にかかる x 方向の力は以下の(13)のように表される。

$$P_1 - P_2 + W \sin \theta - r \Delta x \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 P_1 および P_2 は断面 I-I' と断面 II-II' にかかる圧力、 W は体積力、 r は壁面に作用する摩擦応力、 S は潤滑長

また、 x 方向に対する法線方向(y 方向)の断面 I-I' と断面 II-II' の圧力水頭 h_1 、 h_2 、管底から重心までの高さ r_1 、 r_2 、各断面の管底高 z_1 、 z_2 (鉛直方向)を用いると、(13)の各項は以下の(14)のように表される。

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \rho g A (h_1 \cos \theta - r_1 \cos \theta) \\ P_2 &= \rho g A (h_2 \cos \theta - r_2 \cos \theta) \\ W &= \rho g A \Delta x \\ \sin \theta &= \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ここで、管路の断面積を一様 ($r_1 = r_2$) とすると、(13)は(14)を用いると以下の(15)のように表される。

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 + W \sin \theta - r \Delta x &= \rho g A (h_1 \cos \theta - r_1 \cos \theta) - \rho g A (h_2 \cos \theta - r_2 \cos \theta) + \rho g A \Delta x \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - r \Delta x \\ &= \rho g A h_1 \cos \theta - \rho g A h_2 \cos \theta + \rho g A \Delta x \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - r \Delta x \\ &= \rho g A h_1 \cos \theta - \left(\rho g A h_2 \cos \theta + \rho g A \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} \Delta x \right) + \rho g A \Delta x \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - r \Delta x \\ &= -\rho g A \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} \Delta x + \rho g A \Delta x \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - r \Delta x \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

運動量保存則によれば、微小区間における単位時間あたりの流体の運動量変化である(9)と流体にかかる力(15)が等しいことから、以下の(16)のように表される。

$$\rho \frac{\partial v A \Delta x}{\partial t} = -\rho g A \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} \Delta x + \rho g A \Delta x \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - r \Delta x \dots \dots \dots (16)$$

(16)の両辺を密度 ρ および Δx で除すると以下の(17)のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -gA \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} + gA \frac{z_1 - z_2}{\Delta x} - \frac{\tau}{\rho} S \dots \dots \dots (17)$$

$Q = Av$, $z = z_1 - z_2$ を用いて(17)を以下の(18)のように表す。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial}{\partial x} (h \cos \theta + z) + \frac{\tau}{\rho} S = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$h \cos \theta + z$ (圧力水頭と位置水頭の和)を H とすると(18)は以下のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho} S = 0 \dots \dots \dots (19)$$

(19)において、壁面に作用する摩擦応力 τ を Manning 則で表すと以下の(20)のように表される。

$$\tau = \frac{\rho g n^2 v |v|}{R^{4/3}} \dots \dots \dots (20)$$

$R = A/S$ より $S = A/R$ と(20)を用いると、(19)の左辺第3項は以下の(21)のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho} S &= \frac{1}{\rho} \frac{\rho g n^2 v |v|}{R^{4/3}} \times \frac{A}{R} \\ &= \frac{g A n^2 v |v|}{R^{4/3}} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

したがって、(19)は(21)を用いると以下の(22)のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g A n^2 v |v|}{R^{4/3}} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

また、管路の入口、出口、曲がり等の局所損失を考慮する場合、局所損失 Δh_l は一般に(23)のように表される。

$$\Delta h_l = \left(\frac{v^2}{2g} + h_1 \cos \theta + z_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_2 \cos \theta + z_2 \right) = f \frac{v |v|}{2g} \dots \dots \dots (23)$$

(23)に $\rho g A / \Delta x$ を乗じて整理すると以下の(24)のように表される。

$$\frac{\rho g A}{\Delta x} \Delta h_l = -\frac{\rho A}{\Delta x} \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) - \frac{\rho g A}{\Delta x} \{ (h_2 \cos \theta + z_2) - (h_1 \cos \theta + z_1) \} = f \frac{\rho A v |v|}{\Delta x} \dots \dots \dots (24)$$

(22)に局所損失の(24)を加えると、局所損失を含む運動方程式は以下の(25)のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gA \left(\frac{n^2 v |v|}{R^{4/3}} + \frac{1}{\Delta x} f \frac{v |v|}{2g} \right) = 0 \dots \dots \dots (25)$$